Leçon n° 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Soit G un groupe fini.

I/ Propriétés sur les groupes et classification des groupes abéliens finis.

A/ Premières définitions et propriétés. [PER] [ROM]

Définition 1 : Ordre d'un groupe.

Définition 2 : Classe à gauche et indice.

Théorème 3 : Lagrange.

Corollaire 4 : $|G| = [G : H]|H|$.

Remarque 5 : Réciproque fausse $\mathfrak{A}_4$ n'admet pas de sous-groupe d'ordre 6.

Définition 6 : Générateurs d'un groupe.

Définition 7 : Ordre d'un élément.

Proposition 8 : Propriétés sur l'ordre d'un élément.

Définition 9 : Sous-groupe distingué.

Proposition 10 : Quotient et structure de groupe.

Application 11 : Construction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition 12 : Groupe simple.

B/ Groupes cycliques. [ROM]

Définition 13 : Groupe monogène et cyclique.

Exemple 14 : $\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Proposition 15 : Un groupe de cardinal premier est cyclique.

Proposition 16 : Tout groupe cyclique est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Proposition 17 : La réciproque du théorème de Lagrange est vraie pour les groupes cycliques.

C/ Le cas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. [ROM]

Proposition 18 : Éléments engendrant $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition 19 : Indicatrice d'Euler.

Proposition 20 : Il y a $\varphi(d)$ générateurs d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Application 21 : Tout sous-groupe fini d'un corps multiplicatif est cyclique.

Théorème 22 : Théorème chinois.

D/ Classification des groupes abéliens finis. [ROM]

Théorème 23 : Théorème de structure des groupes abéliens finis.

Application 24 : Avec le théorème chinois, on les a tous à isomorphisme près.

Exemple 25 : Groupes d'ordre 24 à isomorphismes près.

II/ Exemples de groupes finis non abéliens : $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$. [ROM]

Définition 26 : Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Proposition 27 : Son cardinal.

Théorème 28 : Décomposition en produit de cycles disjoints.

Théorème 29 : Systèmes de générateurs de $\mathfrak{S}_n$.

Proposition 30 : Existence et unicité du morphisme signature.

Définition 31 : Groupe alterné : unique sous-groupe d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$.

Développement 1

Lemme 32 : Les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.

Théorème 33 : $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$.

Corollaire 34 : Les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.

III/ Action de groupes : outil pour l'étude des groupes finis.

A/ Action de groupe. [PER]

Définition 35 : Action de groupe.

Remarque 36 : Pareil que de se donner un morphisme.

Application 37 : Théorème de Cayley.

Définition 38 : Stabilisateur et orbite.

Théorème 39 : Équation aux classes.

Application 40 : Tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

Théorème 41 : Formule de Burnside.

B/ Sous-groupes de Sylow. [PER]

Définition 42 : p-sous-groupe de Sylow.

Théorème 43 : Théorème de Sylow 1 : Existence des p-Sylows.

Théorème 44 : Théorème de Sylow 2 : Dénombrement des p-Sylows et ils sont tous conjugués.

Corollaire 45 : Un p-Sylow est unique ssi il est distingué.

Application 46 : Un sous-groupe d'ordre 63 n'est pas simple. Les groupes d'ordre pq avec p et q premiers distincts ne sont pas simples.

C/ En géométrie : Isométries préservant les polytopes. [CAL]

Définition 47 : On note $I_S(X)$ les isométries laissant stable X.

Proposition 48 : Triangle équilatéral $I_S(X) \simeq \mathfrak{S}_3$. Pour le polygone régulier c'est le groupe diédral.

Proposition 49 : Groupe isométries tétraèdre.

Développement 2

Proposition 50 : Détermination du groupe des isométries du cube et colorations des cubes à c couleurs.

Références :

— [PER] Perrin p. 9
— [ROM] Rombaldi Algèbre 2nd éd. p.1, p. 26, p. 37 et p. 279
— [CAL] Caldéro Histoires hédonistes tome 1 p. 250